

الصفحة
1 / 1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع



9	المعامل	NS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.................... (3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية...................... (3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.......................... (3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................ (5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل......................... (4.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

I– في الحلقة الواحدية $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ، نعتبر المصفوفتين $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) احسب $I-A$ و A^2 — 0.75

2) استنتج أن A تقبل مقلوبا المطلوب تحديده . — 0.5

II - لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I=]1,+\infty[$ نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

1) تحقق أن $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1 \quad ; \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ — 0.25

2) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I — 0.5

3) نذكر أن $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق $\varphi: \mathbb{R}^{*+} \to I$

$x \mapsto \sqrt{x+1}$

أ– بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ نحو $(I,*)$ — 0.5

ب– استنتج بنية $(I,*)$ — 0.25

ج– بين أن المجموعة $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m} \ / \ m\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$ — 0.75

التمرين الثاني :(3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

I–نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) — 0.75

2) أ– تحقق أن : $z_1z_2=a^2(i-1)$ — 0.25

ب– بين أن : z_1z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ — 0.5

II– ليكن c عددا حقيقيا غير منعدم و z عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي: 1 و $1+i$ و c و ic و z

1) أ– بين أن: A و D و M مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$ (لاحظ أن $c=\bar{c}$) — 0.5

ب– بين أن : $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$ — 0.5

2) ليكن h لحق النقطة H ، المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

أ– بين أن : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$ — 0.75

ب– استنتج أن : $(CH)\perp(BH)$ — 0.25

التمرين الثالث:(3 نقط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 143x-195y=52$

1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 واستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ 0.5

ب- علما أن الزوج $(-1,-1)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . 0.75

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع 5 0.5

بين أن لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $n^{4k}\equiv 1\ [5]$

3) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث: $x\equiv y\quad [4]$

أ- بين ان لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $n^x\equiv n^y\ [5]$ 0.5

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $n^x\equiv n^y\ [10]$ 0.5

4) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) 0.25

بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

التمرين الرابع:(5.5 نقطة)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ 0.5

2) أ– ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$ 0.5

ب– بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ ، وحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D) 0.5

3) ادرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها . 0.75

4) أنشئ المنحنى (C_3) (نأخذ $f_3(-1,5)\approx 0$ و $f_3(-0,6)\approx 0$ و $\ln 3\approx 1,1$) 0.75

5) أ– بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن $\dfrac{e}{n}<\ln n$ 0.25

ب– بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : 1

$x_n\leq -\ln n$ و $\dfrac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

ج– احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 0.5

6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x)=-1-x\ln x \ ;\ x>0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$

أ– بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 0.25

ب– تحقق أن لكل $n \geq 3$: $g\left(\frac{-1}{x_n}\right)=\frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

ج–استنتج $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

التمرين الخامس:(4.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $F(0)=1$ و $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لكل x من $]0,1]$

1) ليكن x من $]0,1]$. بين أن لكل t من $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x}\leq\frac{1}{1+2t}\leq 1$ 0.25

2) ليكن x من $]0,1]$

أ– بين أن : $F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x\frac{t}{1+2t}dt$ 0.5

ب–بين أن : $\frac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0.75

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0,1]$: $\int_0^x\frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$ 0.75

4) ليكن x من $]0,1]$

أ– بين أن : $F'(x)=-\frac{4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$ 0.5

ب– بين أن $\frac{-4}{3}\leq F'(x)\leq\frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1)) 0.75

ج– بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن : 0.75

$$\frac{-4}{3}\leq\frac{F(x)-F(0)}{x}\leq\frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د– استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0 0.25

انتهى الموضوع